TEOREMA DI FOURIER

"ogni funzione periodica di frequenza **f=1/T**, è scomponibile nella serie di funzioni sinusoidali aventi frequenza multipla alla fondamentale **f**

Data una funzione y(t) , periodica di periodo *T, limitata e integrabile; allora y(t) è sviluppabile in serie di Fourier, ossia vale:*

$$y(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)] \qquad \textbf{(1)}$$

dove a_n e b_n sono opportuni coefficienti che dipendono dalla forma analitica della funzione periodica y(t)

$$\omega_n = \frac{2\pi n}{T}$$

La sinusoide avente frequenza uguale alla frequenza fondamentale f_0 si dice anche **armonica fondamentale** o **prima armonica**; le sinusoidi aventi frequenza multipla della frequenza fondamentale si dicono **armoniche successive** (seconda, terza, ecc.) o anche **parziali.** Un'oscillazione (onda) costituita da più armoniche verrà detta **onda complessa**. Ogni onda complessa avrà un suo contenuto armonico caratterizzato dai diversi valori delle ampiezze e delle fasi delle varie armoniche in cui essa si scompone

Calcolo dei coefficienti dello sviluppo di Fourier

In generale i coefficienti si calcolano mediante i seguenti integrali:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T y(t)\, dt$$

che non è altro che il valor medio della funzione $y(t)$ sull'intervallo di periodicità [0,T].

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y(t) \cos(\omega_n t) dt \quad ; \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y(t) \sin(\omega_n t) dt$$

Ciascuno dei termini di questa somma è chiamato *modo di Fourier*. Nell'importante caso particolare nel quale la $f(x)$ è una funzione a valori reali, spesso risulta utile servirsi dell'identità $e^{inx} = \cos(nx) + i\sin(nx)$ per rappresentare equivalentemente $f(x)$ come combinazione lineare infinita di funzioni della forma $\cos(nx)$ e $\sin(nx)$. Si ottiene la serie di Fourier:

Per funzioni pari (dove compaiono solo i coseni); mentre per funzioni dispari (dove compaiono solo i seni)

I coefficienti a_n e b_n esprimono le ampiezze, ovvero i pesi delle sinusoidi e cosinusoidi, e $a_0/2$ corrisponde al valor medio in un periodo della funzione $f(x)$.

Tale formulazione si riconduce alla precedente rappresentazione se:

$$F_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \quad \text{e} \quad F_n = F^*_{-n}$$

Forma complessa La serie di Fourier in forma complessa di una funzione $f(x)$ è:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n e^{\frac{i2\pi nx}{T}} \quad ; \quad \gamma_n \in \mathbb{C} \qquad i = \sqrt{-1}$$ in cui

I coefficienti γ_n sono calcolati tramite la relazione: $\gamma_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(x) e^{\frac{-i2\pi nx}{T}} dx$

Se la funzione $f(x)$ è reale i coefficienti γ_n soddisfano la proprietà di simmetria hermitiana: $\gamma_n^* = \gamma_{-n}$

Forma polare Un'altra forma in cui è possibile esprimere la serie di Fourier di una funzione $f(x)$ reale è la forma polare:

$$f(x) = c_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\left(\frac{2\pi nx}{T} + \phi_n\right)$$

I coefficienti c_0, c_n e ϕ_n possono essere definiti partendo dai coefficienti γ_n della forma complessa:

$$c_0 = \gamma_0 \quad ; \quad c_n = |\gamma_n| \quad ; \quad \phi_n = \angle\gamma_n$$